

# 비틀림 진자를 이용한 강제조화진동



## 1 목적

비틀림 진동하는 물체가 마찰력과 구동력을 받을 때 나타나는 강제조화진동으로부터 공명현상을 이해한다.

## 2 기구

비틀림진자 실험장치, 추, 전원장치

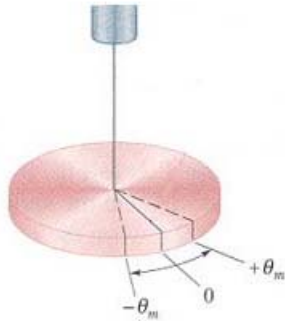
## 3 이론

입자나 입자계가 한 점(평형점)을 중심으로 같은 시간 간격으로 계속 반복하는 것을 주기운동이라 하고 이러한 왕복운동을 진동(oscillation)이라 부른다. 진동운동은 사인이나 코사인함수로 표현될 수 있는데 이러한 함수로 표현된 운동을 조화진동이라 하고 작용하는 힘에 따라서 단조화진동, 감쇠조화진동, 강제조화진동과 같이 분류할 수 있다.

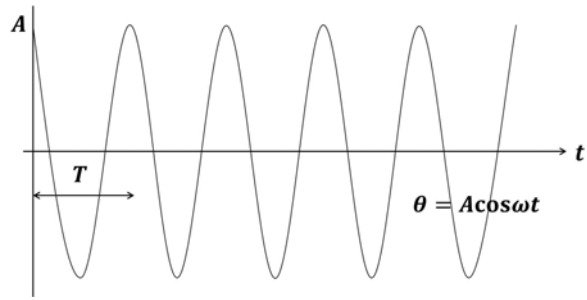
### 3-1. 단조화진동

그림 1과 같이 가는 줄의 끝에 달려 있는 원반 또는 가는 막대와 같은 물체를 생각해 보자. 줄의 끝이 각  $\theta$ 만큼 뒤틀려 있을 때 물체에 작용하는 토크(돌림힘)는  $\tau = -\kappa\theta$ 이다. 여기서  $\kappa$ 는 비틀림 탄성상수라 한다. 음(-)의 부호는 복원시키려는 토크임을 의미한다.

뉴턴의 제2법칙에서  $\tau = I\alpha$  이므로, 다른 외력이 없을 때는



▲ [그림 1] 비틀림 진자



▲ [그림 2] 단조화 진동

$$-\kappa\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (1)$$

가 되고, 다시 정리하면

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\kappa}{I}\theta = 0 \quad (2)$$

가 되어 다음 식 (3)의 각진동수를 갖는 단조화진동자의 운동방정식임을 알 수 있다.

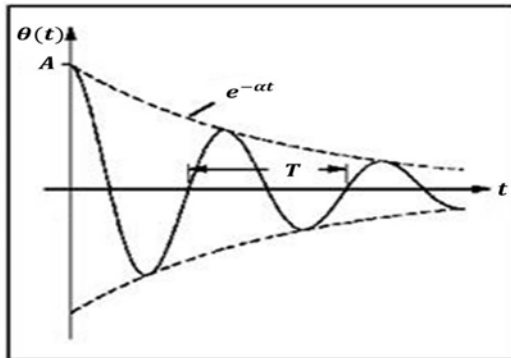
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{I}} \quad (3)$$

여기서 주기는

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}} = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (4)$$

이다. 탄성한계를 벗어나지 않으면 이 식은 모든 각에서 성립하며, 그 계는 그림 2와 같이 단조화진동을 할 것이다.

### 3-2. 감쇠조화진동



▲ [그림 3] 감쇠조화진동

이상적인 진동계는 외부로부터 마찰이 없다. 그러나 실제 계에서는 항상 약간의 마찰이 있으며, 그 계에 에너지를 보충해 주지 않으면 진동은 시간에 따라서 진폭이 줄어들어 결국 멈춘다. 이렇게 진폭이 감소하는 것을 감쇠(damping)라 부르며 이에 해당하는 운동을 감쇠진동(damped oscillation)이라 한다.

감쇠진동의 가장 간단한 경우는 마찰에 의한 토크가 진동 물체의 각속도에 비례하는 경우이다.

이 경우 감쇠 토크는  $\tau = -b \frac{d\theta}{dt}$  가 되며, 여기서  $b$ 는 감쇠토크의 정도를 나타내는 상수이다.

음(-)의 부호는 토크가 항상 각속도 방향에 반대임을 나타낸다. 물체에 작용하는 총 토크는

$$\Sigma \tau = -\kappa\theta - b \frac{d\theta}{dt} \quad (5)$$

이며 뉴턴의 제2법칙은

$$-\kappa\theta - b \frac{d\theta}{dt} = I \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (6)$$

이고, 위 방정식을 다시 쓰면

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + b \frac{d\theta}{dt} + \kappa\theta = 0 \quad (7)$$

가 된다. 위 식은  $\theta$ 에 대한 미분방정식이다.

미분방정식의 해는

$$\theta = A e^{-\delta t} \cos \omega t \quad (8)$$

$$\delta = \frac{b}{2I} : \text{감쇠인자} \quad (9)$$

로 표현된다.

진동하는 물체의 각진동수  $\omega$ 는

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I} - \frac{b^2}{4I^2}} \quad (10)$$

즉,

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad (11)$$

으로 주어진다.

### 3-3. 강제조화진동

감쇠조화진동은 결국 마찰에 의해 진동이 멈추게 되므로 조화진동을 유지하기 위하여 일정한 진동수를 갖는 외부 토크를 인가하여 진동시키는 것을 강제조화운동이라 한다. 예로서 놀이터의 그네에 앉아 있는 소년을 생각해 보자. 각 주기마다 약간씩 그네를 밀면 일정한 진폭으로

그네를 타게 할 수 있으며 이렇게 더해지는 외부 토크를 구동토크(driving torque)이라 한다. 구동토크는 주기적으로 계에 에너지를 공급하며 그 진동수는 일반적으로 자연 진동수와 다르다. 계를 구동할 때 구동토크의 크기에 따라 계의 진폭이 변화하게 되는데, 자연 진동수와 같은 진동수로 계를 구동시킬 경우 계의 평균운동에너지는 최대가 되며 이 현상을 공명(resonance)이라 한다. 계의 진폭이 최대가 되는 공명은 자연 진동수보다 약간 작은 진동수에서 일어난다.

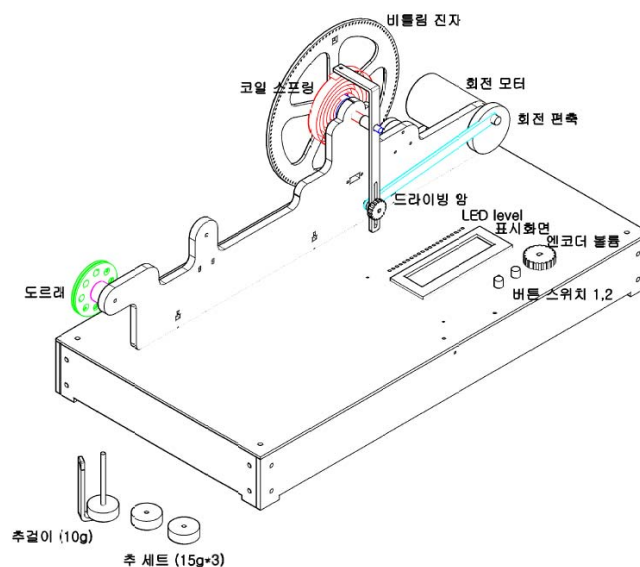
## 4 방법

### 4-1. 비틀림 탄성 상수 측정

그림 4와 같이 비틀림 진자 측정 장치를 설치한다.

- (1) 비틀림 진자 실험장치의 비틀림 진자에 실을 고정하고 도르레를 통과한 실 끝부분에 추걸이를 걸어준다.
- (2) 비틀림 진자 실험장치의 전원을 연결하고 mode 다이얼을 돌려 Spring Constant로 설정한다.
- (3) 비틀림 진자와 연결되어 있는 실에 질량 10 g인 추를 달고 비틀림 진자가 멈출 때 까지 기다리다 진자의 뒤틀림 각  $\theta$ 를 측정한다.
- (4) 질량을 10 g, 20 g, 30 g, 40 g으로 증가시켜 가며 실험과정 (3)을 반복한다.
- (5) 각에 따른 질량의 그래프 기울기(A)를 아래 식에 넣고 비틀림 탄성 상수( $\kappa$ )를 구한다.

$$A = \frac{m}{\theta} = \frac{\kappa}{r g} \quad (r : \text{진자 회전 반경}, g : \text{중력가속도})$$



▲ [그림 4] 비틀림 진자 실험장치

## 4-2. 감쇠조화진동

그림 4와 같이 장치를 설치한다. 이때 비틀림 진자 상수를 위해 걸어두었던 실은 제거한다.

- (1) 비틀림 진자 실험장치의 전원을 연결하고 mode 다이얼을 돌려 Damped Motion으로 설정한다.
- (2) 스타트 버튼(▷)을 누른 후 비틀림 진자를 돌려서 스피링이 감기도록 한다.
- (3) 비틀림 진자가 운동하면서 15회 이상 기록이 되는 지 확인한 후 완전히 정지하게 되면 정지 버튼(□)을 누른다.
- (4) mode다이얼을 돌려 측정된 값을 결과리포트에 기록하고, 비틀림 진자의 회전관성모멘트와 주기( $T$ ), 각진동수( $\omega$ ), 감쇠상수( $\delta$ )를 구하여 표에 기록한다.
- (5) 식 (3), (11)을 이용하여 자연 진동수( $\omega_0$ )를 구한다. 위의 실험 (2) ~ (5)를 세 번 반복한다.

## 4-3. 강제조화진동

그림 4와 같이 장치를 설치한다.

- (1) 비틀림 진자 실험장치의 전원을 연결하고 mode 다이얼을 돌려 Driving Motion으로 설정한다.
- (2) 스타트 버튼(▷)을 누른 후 Mode 다이얼을 돌려 모터의 주기( $T$ )를 700에 맞추고 비틀림 진자의 운동이 일정하게 될 때까지 기다린다.
- (3) 비틀림 진자의 운동이 일정해지면 정지 버튼(□)을 눌러 모터의 주기에 의한 비틀림 진자의 운동을 저장시켜 준다.
- (4) 모터의 주기( $T$ )를 mode 다이얼을 돌려 690으로 조정하고, 비틀림 진자의 운동이 일정해 지도록 기다린 후 정지 버튼(□)으로 값을 저장하도록 한다.
- (5) 모터의 주기( $T$ )를 700에서 550까지 서서히 변화시키면서 실험과정 (3), (4)를 반복한다.
- (6) 실험이 마친 후 스타트 버튼(▷)을 누르면 작동을 멈추게 되고, mode 다이얼을 돌려 Data Reading으로 돌려 저장된 값을 결과 리포트에 기록한다.
- (7) 결과값에서 공명 진동수( $\omega_R$ )를 구하고 감쇠조화진동에서 구한 자연 진동수( $\omega_0$ )와 비교해 보자.

# 5 실험값

## 5-1. 비틀림 진자 상수( $\kappa$ ) 측정

진자 회전 반경( $r$ ) : \_\_\_\_\_ cm    중력 가속도( $g$ ) : 9.8 m/s<sup>2</sup>

기울기  $A(\text{g/rad}) = \frac{m}{\theta} = \frac{\kappa}{rg}$  ( $1\text{g} = 10^{-3}\text{ kg}$ ,  $1\text{ N} = 1\text{ kg}\cdot\text{m/s}^2$ )

⇒ 비틀림 탄성 상수  $\kappa = A r g$

추의 질량 (g)	( rad )	기울기 (A)
10		kg/rad
20		kg/rad
30		kg/rad
40		kg/rad
평균		kg/rad

비틀림 진자 상수 ( $\kappa$ )
N·m/rad

## 5-2. 감쇠조화진동

감쇠토크 상수  $b = 2I\delta$ , 각진동수  $\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\kappa}{I} + \delta^2}$ ,

각진동수  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , 감쇠상수  $\delta = \sqrt{\frac{\kappa}{I} - \omega^2}$ , 자연 진동수  $\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + \delta^2} = \sqrt{\frac{\kappa}{I}}$

(비틀림 진자의 회전관성모멘트  $I = 0.0021602 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ )

주기(T)	각진동수( $\omega$ )	감쇠상수( $\delta$ )	자연 진동수( $\omega_0$ )
ms	rad/s	rad/s	rad/s

※ 그래프를 그리시오. (가장 잘나온 그래프)

	1회			2회			3회		
	CW	CCW	주기	CW	CCW	주기	CW	CCW	주기
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									
10									
11									
12									
13									
14									
15									
16									
17									
18									
19									
20									
21									
22									
23									
24									
25									

### 5-3. 강제조화진동

모터의 속도	CW	CCW	주기
650			
640			
630			
620			
610			
600			
580			
570			
560			
550			

비틀림 진자의 진동주기 ( $t$ )	비틀림 진자의 진동수 ( $\omega$ )	비틀림 진자의 자연진동수 ( $\omega_0$ )	구동모터의 회전 주기 ( $T$ )	구동모터의 진동수 ( $\omega_{구동}$ )
ms	rad/s	rad/s	ms	rad/s

공명현상이 일어날 때의 m값 :

## 6 주의사항

- (1) 비틀림 진자에 연결된 실이 땅에 닿거나 너무 짧지 않게 조정한다.
- (2) 클립이 달려 있는 줄이 도르래를 벗어나지 않도록 한다.

## 7 문제

- (1) 공명현상이 무엇인지 간단히 설명해 보시오.
- (2) 한 계에 작용하는 구동력이나 감쇠력이 없을 때 그 계의 진동수를 무엇이라 하는가?
- (3) 강제조화진동에서 진동수-진폭 그래프가 얻어지는 과정을 설명해 보자.